3. **b)**

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\-5&-1&0\\-2&-8&2\end{vmatrix}=(-2-0)\hat{\imath}-(-10-0)\hat{\jmath}+(40-2)\hat{k}=(-2,10,38),$$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+100+1444}=\sqrt{1548}=6\sqrt{43}$; área $3\sqrt{43}$.

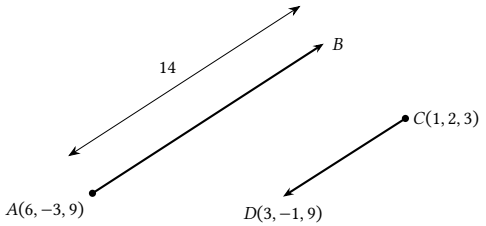
4. **c)** $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=6-40+304=270$; $V=\frac{270}{6}=45$.

Resultado: a) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; b) $3\sqrt{43}$ unidades de área; c) 45 unidades cúbicas.

Ejercicio 2.6.12 · Segmento dirigido paralelo a otro

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 2.

El segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$, de longitud 14, es paralelo al segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$, como se muestra en la figura, con $A(6,-3,9)$, $C(1,2,3)$ y $D(3,-1,9)$. Empleando álgebra vectorial, determine las coordenadas del punto B.



Resolución.

1. **Dirección:** $\overrightarrow{CD}=D-C=(2,-3,6)$, $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{4+9+36}=7$.
2. **Sentido:** en la figura las flechas apuntan en sentidos contrarios, así que $\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección de $\overrightarrow{DC}=(-2,3,-6)$.
3. **Vector:** $\overrightarrow{AB}=14\cdot\frac{(-2,3,-6)}{7}=(-4,6,-12)$.
4. **Punto:** $B=A+\overrightarrow{AB}=(6-4,\,-3+6,\,9-12)=(2,3,-3)$.

Resultado: $B(2,3,-3)$. (Si se tomara el mismo sentido que $\overrightarrow{CD}$, saldría $B(10,-9,21)$; la figura descarta esa opción.)

Ejercicio 2.6.13 · Distancia de un punto al eje y

Adaptado de: 1er parcial 2005-2, tipo B, problema 2.

En la figura, el punto A está en el plano XY y su vector de posición $\vec{a}$ forma un ángulo de 60° con el eje x; el segmento $\overline{AB}$ es paralelo al eje z. Si $|\vec{a}|=16$ y $|\overrightarrow{AB}|=6$, determine la distancia entre el punto B y el eje y.

3. Queda $2x^3-x^2-2x+1$. Se agrupa: $x^2(2x-1)-(2x-1)=(2x-1)(x^2-1)=(2x-1)(x-1)(x+1)$.
4. Comprobación con raíces racionales: los candidatos son $\pm1,\pm\frac{1}{2}$, y los tres que salen están en la lista.
5. **Raíces:** $0,\ i,\ -i,\ \frac{1}{2},\ 1,\ -1$. Son seis, como el grado.

$$f(x)=2x\,(x-i)(x+i)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x-1)(x+1).$$

1B.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 1B.5.1 · Coeficientes a partir de dos raíces

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 3.

Dado el polinomio $P(x)=x^4+x^3-7x^2-Ax+2B$, determine:

- a) los valores de A y B si 1 y -1 son raíces de P;
- b) la expresión de $P(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $P(1)=1+1-7-A+2B=0\ \Rightarrow\ -A+2B=5$.
2. $P(-1)=1-1-7+A+2B=0\ \Rightarrow\ A+2B=7$.
3. Sumando: $4B=12$, $B=3$; entonces $A=7-6=1$. a) $A=1,\ B=3$.
4. $P(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$. Se divide entre $x-1$ y el cociente entre $x+1$:

	1	1	−7	−1	6
1		1	2	−5	−6
−1	1	2	−5	−6	0
		−1	−1	6	
	1	1	−6	0	

5. $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$.
6. b) $P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$. Comprobación: producto de raíces $1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-3)=6=(-1)^4a_0$.

Ejercicio 1B.5.2 · Coeficientes a partir de tres puntos de la gráfica

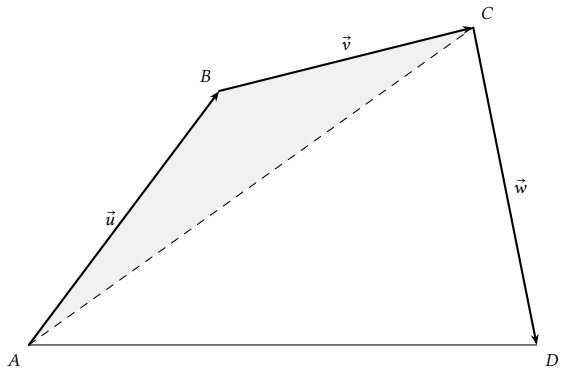
Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 3.

La gráfica del polinomio $p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+A$ contiene a los puntos $(-1,-6)$, $(0,2)$ y $(1,0)$. Determine:

- a) los valores de $A,B,C\in\mathbb{R}$;
- b) todas las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. $p(0)=A=2$.
2. $p(1)=A+B+C+A=0\ \Rightarrow\ B+C=-4$.
3. $p(-1)=-A+B-C+A=-6\ \Rightarrow\ B-C=-6$.
4. Sumando: $2B=-10$, $B=-5$; $C=-4+5=1$. a) $A=2,\ B=-5,\ C=1$.



Resolución.

1. **Diagonal y cuarto lado:** $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} = (14, 10, 0)$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (16, 0, 0)$.
2. **Triángulo** ABC**:** $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 6 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 12 - 64) = (0, 0, -52)$; área $\frac{1}{2} \cdot 52 = 26$.
3. **Triángulo** ACD**:** $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 14 & 10 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0 - 160) = (0, 0, -160)$; área 80.
4. **Suma:** $26 + 80 = 106$. (Comprobación: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|$ con $\overrightarrow{BD} = \vec{v} + \vec{w} = (10, -8, 0)$ da $\frac{1}{2} \cdot 212 = 106$.)

Resultado: 106 unidades de área.

Ejercicio 2.6.8 · Paralelepípedo de volumen dado y componente vectorial

Adaptado de: 2º final 2013-1, problema 2.

Los vectores $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{v} = -2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\vec{w} = 12\hat{\imath} + b\hat{\jmath} - 12\hat{k}$ están sobre tres aristas concurrentes de un paralelepípedo. a) Determine el conjunto de valores de b para los cuales el volumen del paralelepípedo es de 162 unidades cúbicas. b) Obtenga la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Resolución.

1. **a) Producto mixto:**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 12 & b & -12 \end{vmatrix} = 1(-24 + b) - 2(24 + 12) + 2(-2b - 24) = -3b - 144.$$

2. $|-3b - 144| = 162$: $-3b - 144 = 162 \Rightarrow b = -102$, o $-3b - 144 = -162 \Rightarrow b = 6$.
3. **b)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 4 - 2 = 0$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{0}{9}\vec{v} = \vec{0}$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

Resultado: a) $b \in \{-102,\ 6\}$; b) $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

3. $x^4 = -3 = 3\,\text{cis}\,180°$: módulo $\sqrt[4]{3}$, ángulos $\frac{180° + 360°k}{4} = 45°, 135°, 225°, 315°$. En forma binómica, $\sqrt[4]{3}\,\text{cis}\,45° = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1 + i)$, y las otras tres son

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1 + i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(-1 - i), \quad \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}(1 - i).$$

4. **Ocho raíces:** $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm\sqrt[4]{2}\,i$ y $\sqrt[4]{3}\,\text{cis}\,\theta$ con $\theta = 45°, 135°, 225°, 315°$.
5. Cota superior. Con $c = 1$ el residuo es negativo:

	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
1		1	1	1	1	2	2	2	2
	1	1	1	1	2	2	2	2	−4

Con $c = 2$, todos los resultados son positivos:

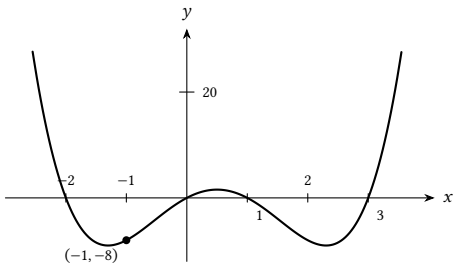
	1	0	0	0	1	0	0	0	−6
2		2	4	8	16	34	68	136	272
	1	2	4	8	17	34	68	136	266

6. **Cota superior:** $c = 2$**.** En efecto, la única raíz real positiva es $\sqrt[4]{2} < 2$.

Ejercicio 1B.5.5 · Polinomio de menor grado a partir de su gráfica

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -2, 0, 1 y 3 (en los cuatro puntos lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(-1, -8)$.



Resolución.

1. Cuatro cruces del eje, cada uno de multiplicidad 1 (la curva atraviesa el eje): el menor grado es 4.
2. $p(x) = a\,(x + 2)\,x\,(x - 1)(x - 3)$.
3. Punto $(-1, -8)$: $a\,(1)(-1)(-2)(-4) = -8a = -8$, así que $a = 1$. Es positivo, como indican los extremos que suben.
4. $p(x) = x(x + 2)(x - 1)(x - 3) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$.

y $A = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Resultado: a) $(0, 0, -3)$; b) $120°$; c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades de área.

Ejercicio 2.6.3 · Vector perpendicular con módulo dado y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2018-1, tipo C, problema 5.

Sean $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, $\vec{b} = 4\hat{k} - 2\hat{\imath}$, $\vec{c} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{d} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$. Determine: a) las componentes del vector $\vec{u}$ perpendicular tanto a $\vec{b}$ como a $\vec{c}$ y tal que $|\vec{u}| = |\vec{a}|$; b) los cosenos directores de $\vec{a}$; c) el vector $\vec{v}$ tal que $2\vec{a} - 3\vec{v}$ es la componente vectorial de $\vec{d}$ sobre $\vec{c}$.

Resolución.

1. **a)** Con $\vec{b} = (-2, 0, 4)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0+4)\hat{\imath} - (-4-4)\hat{\jmath} + (2-0)\hat{k} = (4, 8, 2) = 2(2, 4, 1).$$

   $|(2, 4, 1)| = \sqrt{21}$ y $|\vec{a}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, así que $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{21}}(2, 4, 1) = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2, 4, 1)$.
2. **b)** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\gamma = 0$.
3. **c)** $\vec{d} \cdot \vec{c} = 2 - 1 - 2 = -1$, $|\vec{c}|^2 = 6$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{c}}\,\vec{d} = -\frac{1}{6}(1, -1, 2)$.
4. Despeje: $2\vec{a} - 3\vec{v} = -\frac{1}{6}\vec{c} \Rightarrow \vec{v} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{18}\vec{c} = \left(2, -\frac{4}{3}, 0\right) + \left(\frac{1}{18}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Resultado: a) $\vec{u} = \pm\frac{\sqrt{273}}{21}(2, 4, 1)$; b) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$; c) $\vec{v} = \left(\frac{37}{18}, -\frac{25}{18}, \frac{1}{9}\right)$.

Ejercicio 2.6.4 · Vector unitario paralelo a un plano coordenado y a 45° de otro

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2024-2, tipo A, problema 5.

Obtenga un vector unitario $\hat{v}$, paralelo al plano XZ, que forma un ángulo de $45°$ con el vector $\vec{u} = (2, 0, 2)$.

Resolución.

1. **Incógnitas:** paralelo al plano XZ significa componente y nula: $\hat{v} = (x, 0, z)$, con $x^2 + z^2 = 1$.
2. **Ángulo:** $\hat{v} \cdot \vec{u} = |\hat{v}||\vec{u}| \cos 45° \Rightarrow 2x + 2z = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$, es decir, $x + z = 1$.
3. **Sistema:** $(x+z)^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$ dan $2xz = 0$: $x = 0,\ z = 1$ o $x = 1,\ z = 0$.
4. **Comprobación:** $\hat{k} \cdot (2, 0, 2) = 2 = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Resultado: $\hat{v} = \hat{\imath} = (1, 0, 0)$ o $\hat{v} = \hat{k} = (0, 0, 1)$ (basta dar uno).

Ejercicio 2.6.5 · Área de un triángulo con ángulo y componente escalar

Adaptado de: 2º final 2014-2, problema 2.

Dos de los lados de un triángulo son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman un ángulo de $60°$. La componente escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es 4 y $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Obtenga el área del triángulo.

Resolución.

3. Queda $x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x-2)(x+2)$.
4. b) **Raíces:** 1 (doble), $-1,\ 2,\ -2$: $p(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2)(x+2)$.

Ejercicio 1B.5.8 · Raíz compleja de un polinomio real

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 4.

Sea $p(x) = x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18$. Determine todas sus raíces si $\alpha_1 = 1 - i$ es una de ellas.

Resolución.

1. Coeficientes reales: $\alpha_2 = 1 + i$ también es raíz. Factor cuadrático: $(x - 1 + i)(x - 1 - i) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.
2. Al dividir, $x^4 - 2x^3 + 11x^2 - 18x + 18 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 9)$. Se comprueba multiplicando: $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 9x^2 - 18x + 18$.
3. $x^2 + 9 = 0$: $x = \pm 3i$.
4. **Raíces:** $1 - i,\ 1 + i,\ 3i,\ -3i$.

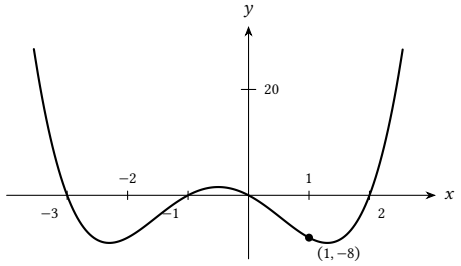
1B.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.1B**.

Ejercicio propuesto 1B.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo B, problema 3.

Determine el polinomio de menor grado, con coeficientes reales, cuya gráfica es la de la figura: corta el eje x en -3, -1, 0 y 2 (en los cuatro lo cruza), crece hacia ambos extremos y pasa por el punto $(1, -8)$.



Resultado: $q(x) = x(x+3)(x+1)(x-2) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 3.

Exprese el polinomio $h(x) = x^6 + (2-i)x^5 + (-3-2i)x^4 + (-6+3i)x^3 + 6ix^2$ como producto de factores lineales, si se sabe que i es una de sus raíces.

2.4.7 Coordenadas de puntos en una figura

1. Copia la figura y marca qué es cada vector: de qué punto a qué punto va y cuáles lados son iguales como vectores (lados opuestos de un paralelogramo con el *mismo* sentido).
2. Parte de un punto conocido y avanza sumando vectores: $B = A + \overrightarrow{AB}$, $A = D - \overrightarrow{AD}$.
3. Con longitud y dirección: $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con el signo que diga la figura.
4. Para el pie de una perpendicular usa la componente vectorial (sección 2.2.9); para un punto medio, $\frac{1}{2}(A + B)$.
5. Comprueba una condición que no usaste (un lado opuesto, un ángulo recto, un módulo).

2.4.8 Problemas con parámetros

1. Escribe los vectores con el parámetro.
2. Traduce cada condición a una ecuación: perpendicular, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; paralelo, componentes proporcionales ($\vec{b} = k\vec{a}$); área, $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = A^2$; volumen, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \pm V$; componente, $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = c$.
3. Resuelve primero la ecuación lineal y sustituye en la cuadrática.
4. Da el *conjunto* de valores (casi siempre dos) y comprueba uno.

2.5 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Paralelogramo dado por sus diagonales

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 2.

Sea el paralelogramo P cuyas diagonales son los vectores $\vec{u} = 2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-4\hat{k}$ y $\vec{v} = (4, 0, 2)$. Obtenga: a) el coseno de uno de los ángulos interiores de P; b) el área de P.

Resolución.

1. **Lados a partir de las diagonales:** si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los lados que salen de un vértice, $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$. Sumando y restando:

$$\vec{a} = \tfrac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \tfrac{1}{2}(6, 2, -2) = (3, 1, -1),$$
$$\vec{b} = \tfrac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \tfrac{1}{2}(-2, 2, -6) = (-1, 1, -3).$$

2. **a) Ángulo interior:** entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que salen del mismo vértice.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -3 + 1 + 3 = 1, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11},$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{11}\sqrt{11}} = \frac{1}{11}.$$

   El otro ángulo interior es el suplementario, con coseno $-\frac{1}{11}$.

3. **b) Área con las diagonales:**

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4-0)\hat{\imath} - (4+16)\hat{\jmath} + (0-8)\hat{k} = (4, -20, -8),$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{16+400+64} = \sqrt{480} = 4\sqrt{30}, \qquad A = \tfrac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}| = 2\sqrt{30}.$$

- **Aplicar Descartes con $a_0 = 0$.** Primero se factoriza la potencia de x.
- **Equivocar $p(-x)$.** Cambian de signo solo los coeficientes de las potencias impares.
- **Contar mal las raíces.** Deben ser tantas como el grado, contando multiplicidades. Si faltan, falta una división.
- **Olvidar el coeficiente principal.** El producto de factores lineales lleva a_n al frente: $2x^6 - \cdots = 2x(x-i)\cdots$
- **Gráfica: suponer $a = 1$.** El coeficiente principal se calcula con un punto de la gráfica que no sea raíz.
- **Cuentas con i.** En la división sintética con complejos, $i \cdot i = -1$; un residuo distinto de 0 indica un error.

1B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x-a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\leq$ cambios de $p(x)$; negativas $\leq$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

1B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe el grado: es el número de raíces que debes entregar.
2. Factoriza x^k si no hay término independiente.
3. Mira los coeficientes: ¿reales (usa el conjugado) o complejos (no)?
4. Divide entre cada raíz conocida con división sintética, mostrando la tabla.
5. Con el cociente real, lista los candidatos racionales; si piden Descartes, haz la tabla antes de probar.
6. Llega a grado 2 y usa la fórmula general.
7. Escribe las raíces en una lista y el polinomio como producto de factores lineales, con a_n al frente. Comprueba con suma o producto de raíces.

Si no se encuentra el camino, la división sintética entre la raíz dada con residuo 0 y el cociente bien escrito ya valen buena parte del problema.

1B.10 Con la computadora

`factor` con `extension=I` factoriza sobre los complejos y `roots` da cada raíz con su multiplicidad. El programa revisa el polinomio del ejemplo 1B.4: comprueba que i es raíz y escribe los factores lineales. Para un polinomio cuyas raíces no tienen forma cerrada, `Poly(f).nroots()` da aproximaciones decimales. El programa usa la biblioteca sympy de Python, que hace álgebra exacta (fracciones, radicales, π): se instala con `pip install sympy` y el código se copia tal cual.

- **Rectángulo y cuadrado:** además, lados consecutivos perpendiculares ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$) y, en el cuadrado, del mismo módulo.
- **Segmento con dirección y longitud dadas:** $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\,\hat{u}$, con $\hat{u}$ el unitario de la dirección y el sentido que indique la figura.
- **Pie de la perpendicular** desde B a la recta AC: $Q = A + \overrightarrow{\text{comp}}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{AB}$.
- **Simétrico** de P respecto a un punto M: $P' = 2M - P$.

Se lee la figura con cuidado: el orden de los vértices en el nombre ($ABCD$, $ADCB$) y el sentido de cada flecha deciden los signos.

2.3 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«de módulo 5 y paralelo a», «cosenos directores», «ángulos directores»	un vector con módulo y dirección	2.4.1
«coseno del ángulo», «ángulo entre», «ángulo interior», «ángulo A»	coseno o ángulo	2.4.2
«componente escalar», «componente vectorial», «en la dirección de», «comp esc», «comp vect»	proyección	2.4.3
«unitario perpendicular tanto a … como a», «paralelo al plano XZ y a 45°»	un vector por condiciones	2.4.4
«área del paralelogramo», «del triángulo», «diagonales», «cuadrilátero»	área	2.4.5
«volumen del paralelepípedo», «aristas concurrentes», «tetraedro», «producto mixto»	volumen	2.4.6
una figura con puntos sin coordenadas: «coordenadas del punto», «cuarto vértice», «punto medio»	coordenadas	2.4.7
«el valor de b», «el conjunto de valores», «tal que su área sea 6»	parámetro	2.4.8

2.4 Procedimientos

2.4.1 Vector con módulo y dirección dados

1. **Paralelo a $\vec{v}$ con módulo r:** $\vec{a} = \pm r\,\hat{v} = \pm\frac{r}{|\vec{v}|}\vec{v}$. Si el enunciado no da el sentido, hay dos respuestas.
2. **Con cosenos directores:** completa el que falta con $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (hay dos signos si no se especifica) y escribe $\vec{a} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
3. **Con ángulos directores:** $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$. Si el que falta da $\cos^2 = 0$, el ángulo es 90°.
4. Comprueba el módulo al final.

Unidad 2 · Álgebra vectorial

↑ Volver al índice

Objetivo (programa 2026, tema 2). «Aplicar los conceptos y operaciones del álgebra vectorial para resolver y visualizar gráficamente problemas elementales de Ingeniería utilizando software.»

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia** (basado en exámenes de los planes 2010 y 2016 en los temas que no cambiaron): en los planes anteriores, un problema (a veces dos) en los 9 finales de Geometría Analítica del Plan 2010 y en 38 de los 39 finales de Cálculo y Geometría Analítica del Plan 2016: área en 18, componente escalar o vectorial en 14, coordenadas de un punto en una figura en 12, volumen con el producto mixto en 10, ángulo o coseno en 8. Los sistemas de referencia polar y cartesiano (sección 2.1) son nuevos en el programa 2026: no hay exámenes de ellos.
- **Tiempo:** de 5 a 6 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 2.1 (30 min) y resuelve los dos propuestos de esa sección.
  2. Lee las secciones 2.2.5 a 2.2.8 (30 min): producto escalar, componentes, producto vectorial y producto mixto.
  3. Aprende los procedimientos 2.4.3 (componentes), 2.4.5 (áreas) y 2.4.6 (volúmenes): juntos cubren casi todos los problemas.
  4. Sigue el ejemplo de la sección 2.5 tapando la resolución (10 min).
  5. Resuelve con cronómetro, 12 min cada uno, los ejercicios 2.6.2, 2.6.5, 2.6.7, 2.6.8 y 2.6.15.

2.1 Sistemas de referencia en el plano y en el espacio

El programa 2026 empieza el álgebra vectorial con los sistemas de referencia. En el **plano cartesiano** un punto es una pareja $P(x, y)$: sus distancias dirigidas a los ejes. En el **plano polar** el mismo punto se describe con una distancia y un ángulo, $P(r, \theta)$; las *ecuaciones de transformación* pasan de un sistema al otro. En el **espacio cartesiano** el punto es una terna $P(x, y, z)$ (sección 2.2). Las coordenadas polares también se usan en la Unidad 4A para describir curvas.

2.1.1 Coordenadas polares

Se fija un punto O, el *polo*, y una semirrecta que parte de él, el *eje polar* (la parte positiva del eje x). Un punto P se describe con el par (r, θ): θ es el ángulo que va del eje polar al segmento OP, positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y r es la distancia dirigida de O a P. En este libro θ se escribe en grados, como en los exámenes.

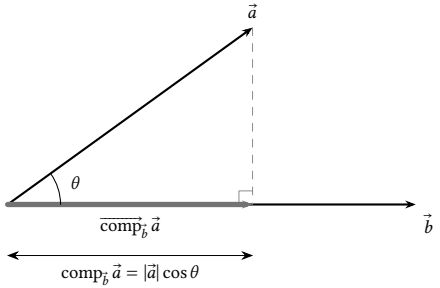
- Si $r > 0$, el punto está sobre la semirrecta de ángulo θ; si $r < 0$, sobre la semirrecta opuesta, de ángulo $\theta + 180^\circ$, a distancia $|r|$.
- El polo es $(0, \theta)$ para *cualquier* θ.
- La *recta a* 90° es la recta perpendicular al eje polar por el polo (el eje y).

2.2.6 Componente escalar y componente vectorial

La *componente escalar* de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es la longitud con signo de la sombra de $\vec{a}$ sobre la dirección de $\vec{b}$; la *componente vectorial* es esa sombra como vector (la proyección ortogonal):

$$\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\theta, \qquad \overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b} = \left(\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}\right)\hat{b}.$$

La componente escalar es negativa si el ángulo es obtuso; la vectorial apunta entonces en sentido contrario a $\vec{b}$. Solo importa la *dirección* de $\vec{b}$: sobre $2\vec{b}$ o $-\vec{b}$ la componente vectorial es la misma. El orden importa: $\operatorname{comp}_{\vec{b}}\vec{a}$ (se divide entre $|\vec{b}|$) no es $\operatorname{comp}_{\vec{a}}\vec{b}$. Sobre un eje: $\overrightarrow{\operatorname{comp}}_{\hat{\jmath}}\vec{a} = (0, a_2, 0)$. Los enunciados también dicen «componente de $\vec{a}$ en la dirección de $\vec{b}$» o escriben «comp esc» y «comp vect».



2.2.7 Producto vectorial, paralelismo y área

El *producto vectorial* (o producto cruz) es el vector

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1\right).$$

(Los determinantes de 3×3 se repasan en la Unidad 0.) Propiedades:

- $\vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$; su sentido sigue la regla de la mano derecha ($\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k}$, $\hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath}$, $\hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath}$).
- $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$ (no es conmutativo) y $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$.
- $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$.
- **Paralelismo:** $\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.

Áreas. El paralelogramo de lados $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene base $|\vec{a}|$ y altura $|\vec{b}|\operatorname{sen}\theta$:

$$A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{a}\times\vec{b}|, \qquad A_{\text{triángulo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|.$$

Si se dan las **diagonales** $\vec{d}_1 = \vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{d}_2 = \vec{a}-\vec{b}$, entonces $\vec{d}_1\times\vec{d}_2 = -2\,\vec{a}\times\vec{b}$ y

$$A_{\text{paralelogramo}} = \tfrac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|, \qquad \vec{a} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1+\vec{d}_2), \quad \vec{b} = \tfrac{1}{2}(\vec{d}_1-\vec{d}_2).$$

- **De cartesiana a polar (un punto):** $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y θ con $\tan\theta = \frac{y}{x}$ *en el cuadrante del punto*. Para $(-2, 2\sqrt{3})$: $r = 4$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$ y el punto está en el segundo cuadrante, así que $\theta = 120^\circ$ (no -60°).
- **De una ecuación polar a cartesiana:** se busca que aparezcan $r\cos\theta$, $r\operatorname{sen}\theta$ y r^2; casi siempre se multiplica por r o se eleva al cuadrado. Multiplicar por r solo puede agregar el polo, que se revisa aparte.
- **De una ecuación cartesiana a polar:** se sustituyen $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ y se simplifica.

2.1.5 Distancia entre vectores

La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que los une; por eso el programa la llama *distancia entre vectores*: si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores de posición de A y B,

$$d(A,B) = |\vec{b}-\vec{a}| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Con puntos dados en polares, primero se pasan a cartesianas con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$.

2.1.6 Ejemplo y ejercicios propuestos

Ejemplo resuelto · Del plano cartesiano al polar y de regreso

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 2.1).

Sean $A(-3,3)$ en cartesianas y $B(6,240^\circ)$ en polares. a) Obtenga unas coordenadas polares de A con $r>0$ y otras con $r<0$. b) Obtenga las coordenadas cartesianas de B. c) Calcule la distancia entre A y B. d) Escriba en forma polar la curva $x^2+y^2=4y$ e identifíquela.

Resolución.

1. **a)** $r = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$; $\tan\theta = \frac{3}{-3} = -1$ y el punto está en el segundo cuadrante: $\theta = 135^\circ$. Así $A\left(3\sqrt{2}, 135^\circ\right)$, y con $r<0$, $A\left(-3\sqrt{2}, 315^\circ\right)$.
2. **b)** $x = 6\cos 240^\circ = 6\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, $y = 6\operatorname{sen}240^\circ = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$: $B\left(-3, -3\sqrt{3}\right)$.
3. **c)** $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(0, -3\sqrt{3}-3\right)$, así que $d(A,B) = 3+3\sqrt{3}$.
4. **d)** Con $x^2+y^2 = r^2$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$: $r^2 = 4r\operatorname{sen}\theta$, es decir $r = 4\operatorname{sen}\theta$ (el polo, $r=0$, ya está en esta curva con $\theta = 0^\circ$). Completando el cuadrado, $x^2+(y-2)^2 = 4$: circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2, que pasa por el polo.

Resultado: a) $\left(3\sqrt{2}, 135^\circ\right)$ o $\left(-3\sqrt{2}, 315^\circ\right)$; b) $\left(-3, -3\sqrt{3}\right)$; c) $3+3\sqrt{3}$; d) $r = 4\operatorname{sen}\theta$, circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2.

Las resoluciones de estos dos propuestos están en el **Apéndice E, sección E.2**.

Ejercicio propuesto 2.1.1 · Conversión de puntos

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 2.1).

a) Obtenga unas coordenadas polares de $P\left(-2\sqrt{3}, -2\right)$ con $r>0$ y $0^\circ \le \theta < 360^\circ$, y otras con $r<0$. b) Obtenga las coordenadas cartesianas de $Q(5, -90^\circ)$.

5. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$. El punto $(1, 0)$ dice que $x = 1$ es raíz:

	2	−5	1	2
1		2	−3	−2
	2	−3	−2	0

6. $2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$.
7. b) **Raíces:** $1,\ 2,\ -\frac{1}{2}$.

Ejercicio 1B.5.3 · Coeficientes complejos con una raíz dada

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 3.

Para el polinomio

$$P(x) = x^5 + (-2 + i)x^4 + (-6 - i)x^3 + (8 - 7i)x^2 + (5 + i)x + (-6 + 6i),$$

determine sus raíces, si una de ellas es $1 - i$, y represéntelo como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. Hay coeficientes complejos: $1+i$ **no** tiene por qué ser raíz. Se divide solo entre $x-(1-i)$:

	1	$-2+i$	$-6-i$	$8-7i$	$5+i$	$-6+6i$
$1-i$		$1-i$	$-1+i$	$-7+7i$	$1-i$	$6-6i$
	1	−1	−7	1	6	0

   Por ejemplo, en la segunda columna: $(1 - i)(1) = 1 - i$ y $(-2 + i) + (1 - i) = -1$.
2. El cociente es real: $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$. Candidatos racionales: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
3. $x = 1$ y luego $x = -1$:

	1	−1	−7	1	6
1		1	0	−7	−6
−1	1	0	−7	−6	0
		−1	1	6	
	1	−1	−6	0	

4. $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.
5. **Raíces:** $1 - i,\ 1,\ -1,\ 3,\ -2$.

$$P(x) = (x - 1 + i)(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2).$$

Ejercicio 1B.5.4 · Polinomio bicuadrado y cota superior

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces del polinomio $p(x) = x^8 + x^4 - 6$ y una cota superior de sus raíces reales.

Resolución.

1. Con $u = x^4$: $u^2 + u - 6 = (u + 3)(u - 2) = 0$, así que $u = 2$ o $u = -3$.
2. $x^4 = 2$: raíces cuartas de $2 = 2\,\mathrm{cis}\,0^\circ$. Módulo $\sqrt[4]{2}$, ángulos $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$:

$$x = \sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[4]{2}\,i, \quad -\sqrt[4]{2}, \quad -\sqrt[4]{2}\,i.$$

Ejercicio 2.6.9 · Volumen con un vector dado por cosenos directores

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-2, tipo D, problema 5.

Tres aristas concurrentes del paralelepípedo P son los vectores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, -2, 3)$ y $2\vec{w}$. Dos de los cosenos directores del vector unitario $\vec{w}$ son $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Obtenga: a) $\overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u}$; b) el volumen de P.

Resolución.

1. $\vec{w}$**:** $\cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$, así que $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
2. **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 2 + 3 = 5$, $|\vec{v}|^2 = 13$: $\overrightarrow{\mathrm{comp}}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{5}{13}(0, -2, 3) = \left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$.
3. **b)**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 2\left(0 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + 1\left(0 - \frac{3}{2}\right) + 1\,(0 + 1) = -3\sqrt{3} - \frac{1}{2}.$$

   Con la arista $2\vec{w}$ el producto mixto se duplica: $V = 2\left|-3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right| = 6\sqrt{3} + 1$.

Resultado: a) $\left(0, -\frac{10}{13}, \frac{15}{13}\right)$; b) $V = 6\sqrt{3} + 1$ unidades cúbicas.

Ejercicio 2.6.10 · Componente escalar y producto mixto con parámetros

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2019-2, tipo A, problema 5.

Sean $\vec{a} = (-2, 3, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -4)$ y $\vec{c} = (m, n, -6)$. Determine m y n tales que $\mathrm{comp}_{\vec{b}}\,\vec{c} = \frac{29}{\sqrt{17}}$ y el producto mixto $[\,\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\,] = -67$.

Resolución.

1. **Componente:** $|\vec{b}| = \sqrt{17}$ y $\vec{c} \cdot \vec{b} = n + 24$: $\frac{n+24}{\sqrt{17}} = \frac{29}{\sqrt{17}} \Rightarrow n = 5$.
2. **Producto mixto:**

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ m & n & -6 \end{vmatrix} = -2(-6 + 4n) - 3(0 + 4m) + 1(0 - m) = 12 - 8n - 13m.$$

3. Con $n = 5$: $12 - 40 - 13m = -67 \Rightarrow -13m = -39 \Rightarrow m = 3$.

Resultado: $m = 3$, $n = 5$; $\vec{c} = (3, 5, -6)$.

Ejercicio 2.6.11 · Tetraedro: componente escalar, área de una cara y volumen

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo C, problema 5.

Un tetraedro tiene sus vértices en $A(3, 4, -1)$, $B(-2, 3, -1)$, $C(1, -4, 1)$ y $D(0, 0, 7)$. Obtenga: a) la componente escalar de $\overrightarrow{CD}$ sobre $\overrightarrow{AC}$; b) el área del triángulo ABC; c) el volumen del tetraedro.

Resolución.

1. **Vectores:** $\overrightarrow{AB} = (-5, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -8, 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-3, -4, 8)$, $\overrightarrow{CD} = (-1, 4, 6)$.
2. **a)** $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 32 + 12 = -18$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$: $\mathrm{comp}_{\overrightarrow{AC}}\,\overrightarrow{CD} = \frac{-18}{6\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 1B.5.6 · Regla de los signos de Descartes y factores lineales

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 3.

Para el polinomio $h(x) = x^7 + 3x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $h(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resolución.

1. $h(x) = x^3\,q(x)$ con $q(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$. $x = 0$ es raíz de multiplicidad 3.
2. Descartes en q. Signos de $q(x)$: $+\ +\ +\ +\ +$, 0 cambios: **ninguna raíz positiva**.
3. $q(-x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$: signos $+\ -\ +\ -\ +$, 4 cambios: 4, 2 o 0 raíces negativas.

	1^{a}	2^{a}	3^{a}
Positivas	0	0	0
Negativas	4	2	0
Complejas	0	2	4
Total	4	4	4

   (Contando $x = 0$, h tiene además tres raíces nulas.)
4. Candidatos racionales de q: $\pm1, \pm2$; solo se prueban los negativos.

	1	3	3	3	2
-1		-1	-2	-1	-2
-2	1	2	1	2	0
		-2	0	-2	
	1	0	1	0	

5. Queda $x^2 + 1 = 0$: $x = \pm i$. Se cumple la segunda posibilidad de la tabla.
6. $h(x) = x^3(x+1)(x+2)(x-i)(x+i)$.

Ejercicio 1B.5.7 · Raíz de multiplicidad 2

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 4.

Sea $p(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + kx^2 + mx - m$.

- a) Obtenga k y m si $\alpha = 1$ es raíz de multiplicidad 2.
- b) Con esos valores, determine las raíces de $p(x)$.

Resolución.

1. Primera división entre $x - 1$:

	1	-1	-5	k	m	$-m$
1		1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$
	1	0	-5	$k-5$	$k-5+m$	$k-5$

   Residuo $k - 5 = 0$: $k = 5$. El cociente es $x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x + m$.
2. Segunda división entre $x - 1$:

	1	0	-5	0	m
1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	$m-4$

   Residuo $m - 4 = 0$: $m = 4$.

1. **Módulo de $\vec{a}$:** $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos 60° \Rightarrow 4 = \frac{1}{2}|\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}| = 8$.
2. **Área:** $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,60° = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$.

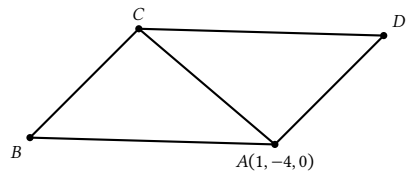
Resultado: $A = 6$ unidades de área.

También en: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo C, problema 5, y 2º final 2016-2, tipo A, problema 5, con $|\vec{b}| = 3$ y componente escalar 2: $|\vec{a}| = 4$ y $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Ejercicio 2.6.6 · Área de una armadura y componente vectorial

Adaptado de: Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2016-1, tipo A, problema 5.

En la armadura de la figura, los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{BA}$ son paralelos, así como $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Sean el punto $A(1, -4, 0)$ y los segmentos dirigidos $\overrightarrow{BD} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ y $\overrightarrow{BC} = (1, 3, -1)$. Determine: a) el área del paralelogramo $ABCD$; b) la componente vectorial de $\overrightarrow{BC}$ sobre $\hat{k} \times \hat{\jmath}$.



Resolución.

1. **Lados desde B:** los lados que salen de B son $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, y $\overrightarrow{BD}$ es la diagonal (no dibujada): $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, así que $\overrightarrow{BA} = (3, -2, -1) - (1, 3, -1) = (2, -5, 0)$.
2. **a)**

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (5-0)\hat{\imath} - (-2-0)\hat{\jmath} + (6+5)\hat{k} = (5, 2, 11),$$

   $A = \sqrt{25 + 4 + 121} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$. (Da lo mismo $|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}|$, porque $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.)
3. **b)** $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$. Con $\vec{e} = -\hat{\imath}$, $|\vec{e}| = 1$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{e}}\,\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{e}\right)\vec{e} = (-1)(-\hat{\imath}) = \hat{\imath}$.

Resultado: a) $5\sqrt{6}$ unidades de área; b) $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$. El punto A no se necesita.

Ejercicio 2.6.7 · Área de un cuadrilátero dado por tres lados

Adaptado de: 2º final 2012-1, problema 3.

Los vectores $\vec{u} = (6, 8, 0)$, $\vec{v} = (8, 2, 0)$ y $\vec{w} = (2, -10, 0)$ son los lados $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CD}$ del cuadrilátero $ABCD$ de la figura. Obtenga el área del cuadrilátero.

Resultado: $h(x) = x^2(x-i)(x+2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $f(x) = p(x)\,q(x)$, donde $p(x) = x^2+1$ y $q(x) = x^6-3x^5-9x^4+20x^3$.

Resultado: $i,\ -i,\ 0$ (triple), $4,\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.4

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo B, problema 3.

Para $g(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 2x^3$, aplique la regla de los signos de Descartes y exprese $g(x)$ como producto de sus factores lineales.

Resultado: Posibilidades (positivas, negativas, complejas) del factor de grado 4: $(4,0,0)$, $(2,0,2)$, $(0,0,4)$. $g(x) = x^3(x-1)(x-2)(x-i)(x+i)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 140.

Ejercicio propuesto 1B.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-2, tipo C, problema 4.

Sea $p(x) = Ax^3 + 2x^2 - Bx + 2$. Determine:

- a) los valores de A y $B \in \mathbb{R}$ si $p(1) = -4$ y $p(2) = 0$;
- b) las raíces de $p(x)$ con esos valores.

Resultado: a) $A = 1$, $B = 9$. b) $2,\ -2+\sqrt{5},\ -2-\sqrt{5}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 1B.6.6

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 3.

Obtenga las raíces de $p(x) = x^5 - (1-3i)x^4 + 5x^3 - (5-15i)x^2 + 4x - (4-12i)$, si se sabe que $1-3i$ es raíz.

Resultado: $1-3i,\ i,\ -i,\ 2i,\ -2i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

1B.7 Errores frecuentes

- **Olvidar los ceros en la división sintética.** En $2x^5 - x^4 - 2x + 1$ faltan x^3 y x^2: sus coeficientes son 0 y deben escribirse.
- **Usar el conjugado con coeficientes complejos.** Si algún coeficiente tiene i, el conjugado de una raíz no es raíz en general. Se divide solo entre $x-\alpha$.
- **No usar el conjugado con coeficientes reales.** Si son reales, el conjugado sí es raíz y ahorra una búsqueda.
- **Perder la raíz $x = 0$.** Cuando no hay término independiente, x^k se factoriza primero y cuenta como raíz de multiplicidad k.

4. **Comprobación con los lados:** $\vec{a}\times\vec{b} = (-2,10,4)$ y $|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$.

Resultado: a) $\cos\theta = \frac{1}{11}$ (el ángulo vecino tiene coseno $-\frac{1}{11}$); b) $A = 2\sqrt{30}$ unidades de área.

2.6 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 2.6.1 · Tres vectores con módulo dado

Adaptado de: 1er final 2012-1, tipo C, problema 3.

Obtenga los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, de módulo 5, 7 y 3 respectivamente, tales que $\vec{a}$ es paralelo al vector $\vec{v} = (6,-2,3)$; $\vec{b}$ tiene cosenos directores $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\cos\beta = \cos\gamma$; y $\vec{c}$ es perpendicular tanto a $\vec{v} = 3\hat{\imath} - 4\hat{k}$ como a $\vec{w} = (-3,1,4)$.

Resolución.

1. $\vec{a}$**:** $|\vec{v}| = \sqrt{36+4+9} = 7$, así que $\vec{a} = \pm\frac{5}{7}(6,-2,3) = \pm\left(\frac{30}{7},-\frac{10}{7},\frac{15}{7}\right)$.
2. $\vec{b}$**:** $\frac{1}{9} + 2\cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$. Entonces $\vec{b} = 7\left(-\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{7}{3},\pm\frac{14}{3},\pm\frac{14}{3}\right)$, con los dos signos iguales.
3. $\vec{c}$**:** perpendicular a los dos, paralelo a su producto cruz (aquí $\vec{v} = (3,0,-4)$):

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (0+4)\hat{\imath} - (12-12)\hat{\jmath} + (3-0)\hat{k} = (4,0,3), \qquad |\vec{v}\times\vec{w}| = 5.$$

Con módulo 3: $\vec{c} = \pm\frac{3}{5}(4,0,3) = \pm\left(\frac{12}{5},0,\frac{9}{5}\right)$.

Resultado: $\vec{a} = \pm\left(\frac{30}{7},-\frac{10}{7},\frac{15}{7}\right)$; $\vec{b} = \left(-\frac{7}{3},\frac{14}{3},\frac{14}{3}\right)$ o $\left(-\frac{7}{3},-\frac{14}{3},-\frac{14}{3}\right)$; $\vec{c} = \pm\left(\frac{12}{5},0,\frac{9}{5}\right)$.

Ejercicio 2.6.2 · Ángulos directores, componente vectorial y área por diagonales

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 2.

Sean el vector $\vec{v}$ de módulo 2, cuyos ángulos directores son α, $\beta = 30^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$, y el vector $\vec{u} = -3\hat{k}$. Determine: a) la componente vectorial de $\vec{u}$ sobre un vector $\vec{w}$ paralelo al eje z; b) el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$; c) el área del paralelogramo cuyas diagonales son $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Resolución.

1. $\vec{v}$**:** $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2 30^\circ - \cos^2 60^\circ = 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$, así que $\alpha = 90^\circ$ y

$$\vec{v} = 2\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(0,\sqrt{3},1\right).$$

2. **a)** Con $\vec{w} = k\hat{k}$ $(k \neq 0)$: $\overrightarrow{\text{comp}}_{\vec{w}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{-3k}{k^2}k\hat{k} = -3\hat{k}$. No depende de k: $\vec{u}$ ya es paralelo al eje z.
3. **b)** $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3$, $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$: $\cos\theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$, así que $\theta = 120^\circ$.
4. **c)**

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = (0+3\sqrt{3})\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0-0)\hat{k} = \left(3\sqrt{3},0,0\right),$$

Con la computadora

```
from sympy import I, Rational, factor, roots, symbols
from sympy import expand

x = symbols("x")
f = 2*x**6 - x**5 - 2*x**2 + x
assert expand(f.subs(x, I)) == 0       # i es raíz
print(factor(f, extension=I))
r = roots(f, x)          # {raíz: multiplicidad}
print(r)
assert set(r) == {0, 1, -1, I, -I, Rational(1, 2)}
```


2.4.2 Ángulo entre vectores y ángulos de un triángulo

1. Escribe los dos vectores que *salen* del vértice del ángulo pedido (para el ángulo A del triángulo ABC: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$).
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$ y sustituye en $\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.
3. Racionaliza; si el coseno es notable, da el ángulo en grados; si no, $\theta = \text{ang cos}(\ldots)$.

2.4.3 Componente escalar y componente vectorial

1. Identifica quién se proyecta ($\vec{a}$) y *sobre* quién ($\vec{b}$). Si el vector se da como segmento, conviértelo: $\overrightarrow{AB} = B - A$.
2. Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y $|\vec{b}|$ (o $|\vec{b}|^2$).
3. Escalar: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$. Vectorial: $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$, simplificada y en componentes.
4. Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, las dos componentes son cero: los vectores son perpendiculares.

2.4.4 Vector perpendicular a dos vectores o con ángulo dado

1. **Perpendicular a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$:** calcula $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$ y saca factores comunes.
2. **Unitario:** $\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$; **con módulo r:** $\pm\frac{r}{|\vec{n}|}\vec{n}$.
3. **Con condiciones sueltas** (paralelo a un plano coordenado, ángulo dado con otro vector): escribe el vector con incógnitas (paralelo al plano XZ: $(x, 0, z)$), plantea una ecuación por condición ($|\hat{v}| = 1$; $\hat{v}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta$) y resuelve el sistema.
4. Comprueba con el producto escalar que da 0 (o el coseno pedido).

2.4.5 Áreas

1. Escoge dos lados que salgan del mismo vértice. Con vértices: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Con diagonales: usa directamente $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$.
2. Calcula el producto cruz con el determinante y su módulo; simplifica el radical.
3. Paralelogramo: $|\vec{a}\times\vec{b}|$. Triángulo: $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$. Diagonales: $\frac{1}{2}|\vec{d}_1\times\vec{d}_2|$. Cuadrilátero: suma de dos triángulos separados por una diagonal.
4. **Sin componentes** (datos de módulos, ángulo y componente escalar): obtén los módulos que falten con $\text{comp}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$ y usa $A = |\vec{a}||\vec{b}|\,\text{sen}\,\theta$ (o la mitad).
5. Si $\vec{a}\perp\vec{b}$, el área del paralelogramo es $|\vec{a}||\vec{b}|$ (rectángulo).

2.4.6 Volúmenes y coplanaridad

1. Escribe las tres aristas que salen de un mismo vértice (con vértices: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$). Si una arista es $2\vec{w}$, el volumen se multiplica por 2.
2. Calcula el determinante de 3×3 con las tres aristas como renglones.
3. Paralelepípedo: el valor absoluto. Tetraedro: un sexto del valor absoluto.
4. Volumen con parámetro: $|\text{determinante}| = V$ da *dos* ecuaciones, $\det = V$ y $\det = -V$. Coplanaridad: $\det = 0$.

Cuando un enunciado pide las intersecciones «con el eje polar» se usa la recta completa que lo contiene ($\theta = 0^\circ$ y $\theta = 180^\circ$); «con la recta a 90°», los ángulos $\theta = 90^\circ$ y $\theta = 270^\circ$.

2.1.2 Varias representaciones de un punto

A diferencia de las coordenadas cartesianas, un mismo punto tiene infinitas parejas polares:

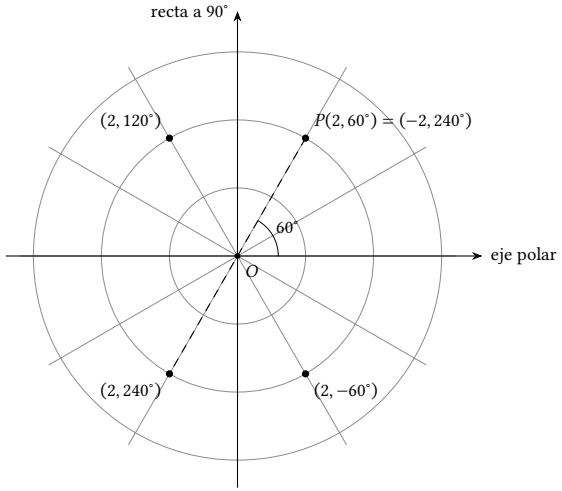
$$(r, \theta) = (r, \theta + 360^\circ k) = (-r, \theta + 180^\circ + 360^\circ k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Por ejemplo, $(2, 60^\circ) = (2, 420^\circ) = (2, -300^\circ) = (-2, 240^\circ) = (-2, -120^\circ)$. Por eso un punto puede estar en una curva aunque la pareja con la que se escribió no cumpla la ecuación: basta que *alguna* de sus representaciones la cumpla. «Dar unas coordenadas polares» de un punto es dar una cualquiera de ellas.

2.1.3 Simetría de puntos

El simétrico de $P(r, \theta)$ es:

- respecto al eje polar: $(r, -\theta)$, o también $(-r, 180^\circ - \theta)$;
- respecto a la recta a 90°: $(r, 180^\circ - \theta)$, o también $(-r, -\theta)$;
- respecto al polo: $(r, \theta + 180^\circ)$, o también $(-r, \theta)$.



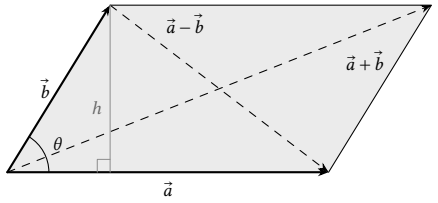
2.1.4 Conversión entre polares y cartesianas

Con el polo en el origen y el eje polar sobre el eje x positivo:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta; \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

- **De polar a cartesiana (un punto):** se aplican las dos primeras. $(4, 120^\circ) \to (4\cos 120^\circ, 4\,\mathrm{sen}\,120^\circ) = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.

Para un triángulo de vértices A, B, C se usan dos lados que salen del mismo vértice: $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Un cuadrilátero se parte en dos triángulos con una diagonal.



$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$
$h = |\vec{b}|\,\mathrm{sen}\,\theta$

2.2.8 Producto mixto, volumen y coplanaridad

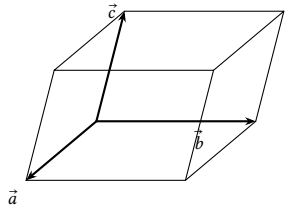
El *producto mixto* de $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ es un número que se calcula con un determinante:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

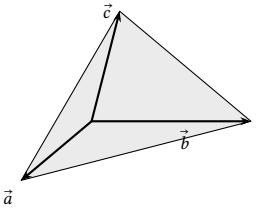
Algunos enunciados lo escriben $[\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$. Una permutación cíclica $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \to \vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ no lo cambia; intercambiar dos vectores le cambia el signo. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo de aristas concurrentes $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (área de la base $|\vec{b} \times \vec{c}|$ por la altura):

$$V_{\text{paralelepípedo}} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|, \qquad V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$

Para un tetraedro de vértices A, B, C, D se usan las tres aristas que salen de un vértice: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Tres vectores son **coplanares** si y solo si su producto mixto es cero (el paralelepípedo es plano); cuatro puntos están en un mismo plano si las tres aristas que salen de uno de ellos son coplanares.



$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$



$V = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

2.2.9 Coordenadas de puntos en una figura

Los problemas de «coordenadas de un punto» se resuelven sumando vectores a puntos conocidos ($B = A + \overrightarrow{AB}$). Las relaciones que más se usan:

- **Paralelogramo:** los lados opuestos son el mismo vector. Si los vértices en orden son A, B, C, D, entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y $D = A + C - B$ (el vértice que falta es la suma de sus dos vecinos menos el opuesto). Las diagonales se cortan en su punto medio común.

Resultado: a) $(4, 210^\circ)$ y $(-4, 30^\circ)$. b) $Q(0, -5)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

Ejercicio propuesto 2.1.2 · Ecuación de transformación y distancia

Adaptado de: Ejercicio propio (programa 2026, tema 2.1).

a) Obtenga la ecuación cartesiana de la curva $r = 6\cos\theta$ e identifíquela. b) Calcule la distancia entre los puntos $M(2, 30^\circ)$ y $N(4, 90^\circ)$, dados en polares.

Resultado: a) $(x-3)^2 + y^2 = 9$: circunferencia de centro $(3, 0)$ y radio 3. b) $d(M, N) = 2\sqrt{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 141.

2.2 Conceptos y expresiones

2.2.1 Recordatorio: el espacio cartesiano

Un punto del espacio es una terna $P(x, y, z)$; los tres planos coordenados (XY, XZ, YZ) dividen el espacio en ocho octantes. La distancia entre $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

La distancia de $P(x, y, z)$ al eje y es $\sqrt{x^2 + z^2}$ (y de modo análogo para los otros ejes).

2.2.2 Segmento dirigido y vector

El *segmento dirigido* $\overrightarrow{AB}$ va del punto inicial A al punto final B. Sus componentes son las diferencias de coordenadas, final menos inicial:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

Dos segmentos dirigidos con las mismas componentes representan el mismo *vector*, sin importar dónde empiecen. El vector de posición del punto $P(x, y, z)$ es $\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. De aquí salen dos reglas que se usan siempre:

- $B = A + \overrightarrow{AB}$: un punto se obtiene sumando a otro el vector que los une.
- El **punto medio** de AB es $M = \frac{1}{2}(A+B)$, y el punto que divide a AB en la razón $\frac{AP}{AB} = k$ es $P = A + k\,\overrightarrow{AB}$.

2.2.3 Módulo, vector unitario y cosenos directores

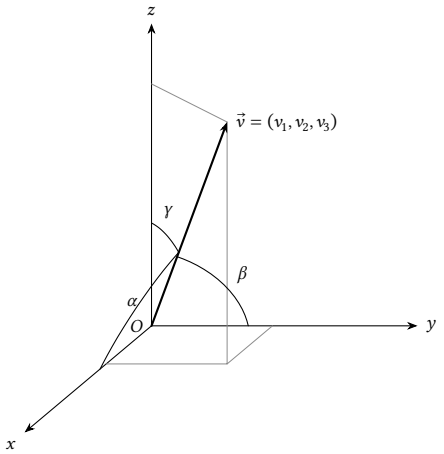
El *módulo* de $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es su longitud, $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Un vector de módulo 1 es *unitario*; el unitario en la dirección de $\vec{v} \neq \vec{0}$ es

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Los *ángulos directores* α, β, γ son los que forma $\vec{v}$ con los ejes x, y, z (cada uno entre 0° y 180°). Sus cosenos, los *cosenos directores*, son las componentes de $\hat{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{|\vec{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{v_2}{|\vec{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{v_3}{|\vec{v}|}, \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Así, un vector de módulo r con cosenos directores conocidos es $\vec{v} = r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Si se conocen dos cosenos, la identidad da el tercero salvo el signo.



2.2.4 Operaciones con vectores

Con $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y un escalar λ:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\ a_2 \pm b_2,\ a_3 \pm b_3), \qquad \lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), \qquad |\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|.$$

La suma se dibuja con la regla del paralelogramo: si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ salen del mismo punto, $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (no nulos) son **paralelos** si $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ para algún $\lambda \neq 0$: con $\lambda > 0$ tienen el mismo sentido y con $\lambda < 0$, sentido contrario. En componentes, sus coordenadas son proporcionales.

2.2.5 Producto escalar, ángulo y perpendicularidad

El *producto escalar* (o producto punto) es el número

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta,$$

donde $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ es el ángulo entre los vectores. Es conmutativo, distributivo sobre la suma y cumple $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$. De ahí:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}, \qquad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

El signo de $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dice si el ángulo es agudo (+), recto (0) u obtuso (−). Un ángulo no notable se deja como $\theta = \operatorname{ang}\cos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. El **ángulo interior** de un triángulo o paralelogramo en el vértice A se calcula con los dos vectores que *salen* de A.